PART4　ベクトルの内積

例題

$\mathrm{A}(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 1)$，$\mathrm{C}(1,\ 0,\ 2)$ とするとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 θ を求めよ。また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

Point Pickup

練習

A(2, 1, 2), B(4, 3, 6), C(0, 1, 0) とするとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角 θ を求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

第14講　PART4 確認問題

3点 A(1, 2, 0), B(0, 0, 2), C(2, 1, 4) がある。

1 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると,

$\theta =$ [アイ]$^\circ$ である。

2 △ABC の面積は $\dfrac{[ウ]}{[エ]}$ である。

[MEMO]

PART4　ベクトルの内積

例題

A(2, 1, 0), B(0, 2, 1), C(1, 0, 2) とするとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 θ を求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 1,\ 1)$　より　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ -1,\ 2)$　より　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2)\times(-1)+1\times(-1)+1\times2=3$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$　であるから

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=60^\circ$

したがって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

練習

$\mathrm{A}(2,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{B}(4,\ 3,\ 6)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ 0)$ とするとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 θ を求めよ。また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 2,\ 4)$　より　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 0,\ -2)$　より　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(-2)^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\times(-2)+2\times0+4\times(-2)=-12$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{-12}{2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　であるから

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=150^\circ$

したがって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=2\sqrt{3}$

第14講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：45

[解説]

$\overrightarrow{AB}=(0-1,\ 0-2,\ 2-0)$ [A]

$=(-1,\ -2,\ 2)$

$\overrightarrow{AC}=(2-1,\ 1-2,\ 4-0)$

$=(1,\ -1,\ 4)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\times1+(-2)\times(-1)+2\times4$ [B]

$=9$

よって，

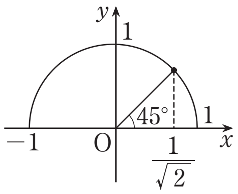
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$$ [C]

$$=\frac{9}{3\times3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ の範囲で

これを満たす θ は，

$\theta=45^\circ$



[A]　2点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，
$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$
$|\overrightarrow{AB}|$
$=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

[B]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

[C]　$\vec{0}$ でない2つのベクトル
$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$
のなす角を θ とすると，
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
$$=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

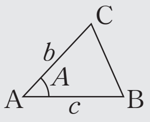
2

[正解] ウ：9，エ：2

[解説]

$\triangle ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin45^\circ$ [D]

$$=\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{9}{2}$$

[D]　$\triangle ABC$ の面積を S とすると，
$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$